ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Σχολικό βιβλίο σελ. 99

Α.2

α) Ψευδής

β)

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$$

Βλέπε σχήμα στο σχολικό βιβλίο σελίδα 35

Στο $(-\infty,0]$ $f(x)=x$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1

Στο $(0,+\infty)$ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα 1-1

Αν $x_1\in(-\infty,0]$, $x_2\in(0,+\infty)$ τότε $x_1\le 0,\ x_2>0,$ άρα $x_1\ne x_2$

$f(x_1)=x_1\le 0,\ f(x_2)=\dfrac{1}{x_2}>0,$ οπότε $f(x_1)\ne f(x_2)$

Άρα η f είναι 1-1 στο $(-\infty,0]\cup(0,+\infty)$

Όμως η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\Re$ αφου είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Α.3 Σχολικό βιβλίο σελ. 216

Α.4 α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}, x \in \Re - \{0\}$

B.1 f παραγωγίσιμη στο $\Re$-$\{0\}$ ως ρητή, με:

$$f'(x) = \left(x - \frac{4}{x^2}\right)' = 1 - 4\frac{(-2)}{x^3} = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3+8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot (x^3+8) > 0$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3		-		-	‖	+	
x^3+8		-	0	+	‖	+	
$f'(x)$		+	0	-	‖	+	
$f(x)$		↗		↘	‖	↗	

$\left.\begin{matrix} f \text{ συνεχής στο } (-\infty,-2] \\ f'(x) > 0 \text{ στο } (-\infty,-2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \uparrow (-\infty,-2]$

$\left.\begin{matrix} f \text{ συνεχής στο } [-2,0) \\ f'(x) < 0 \text{ στο } (-2,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \downarrow [-2,0)$

$\left.\begin{matrix} f \text{ συνεχής στο } (0,+\infty) \\ f'(x) > 0 \text{ στο } (0,+\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \uparrow (0,+\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_o = -2$, το $f(-2) = -2 - \dfrac{4}{(-2)^2} = \boxed{-3}$

B.2

f' παραγωγίσιμη στο $\Re-\{0\}$, ως ρητή με:

$$f''(x)=\left(1+\frac{8}{x^3}\right)'=-\frac{8\cdot 3x^2}{x^6}=-\frac{24}{x^4}<0 \text{ για κάθε } x\in\Re-\{0\}$$

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

B3.

Για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_o = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)\underset{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{4}{x^2}=+\infty}{\overset{\lim\limits_{x\to 0^-} x=0}{=}}-\infty$$

Ομοίως και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία **x = 0**, δηλαδή τον άξονα $y'y$.

Για πλάγια/οριζόντια στο $-\infty$ και στο $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{4}{x^3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)\underset{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^3}=0}{=}1=\lambda$$

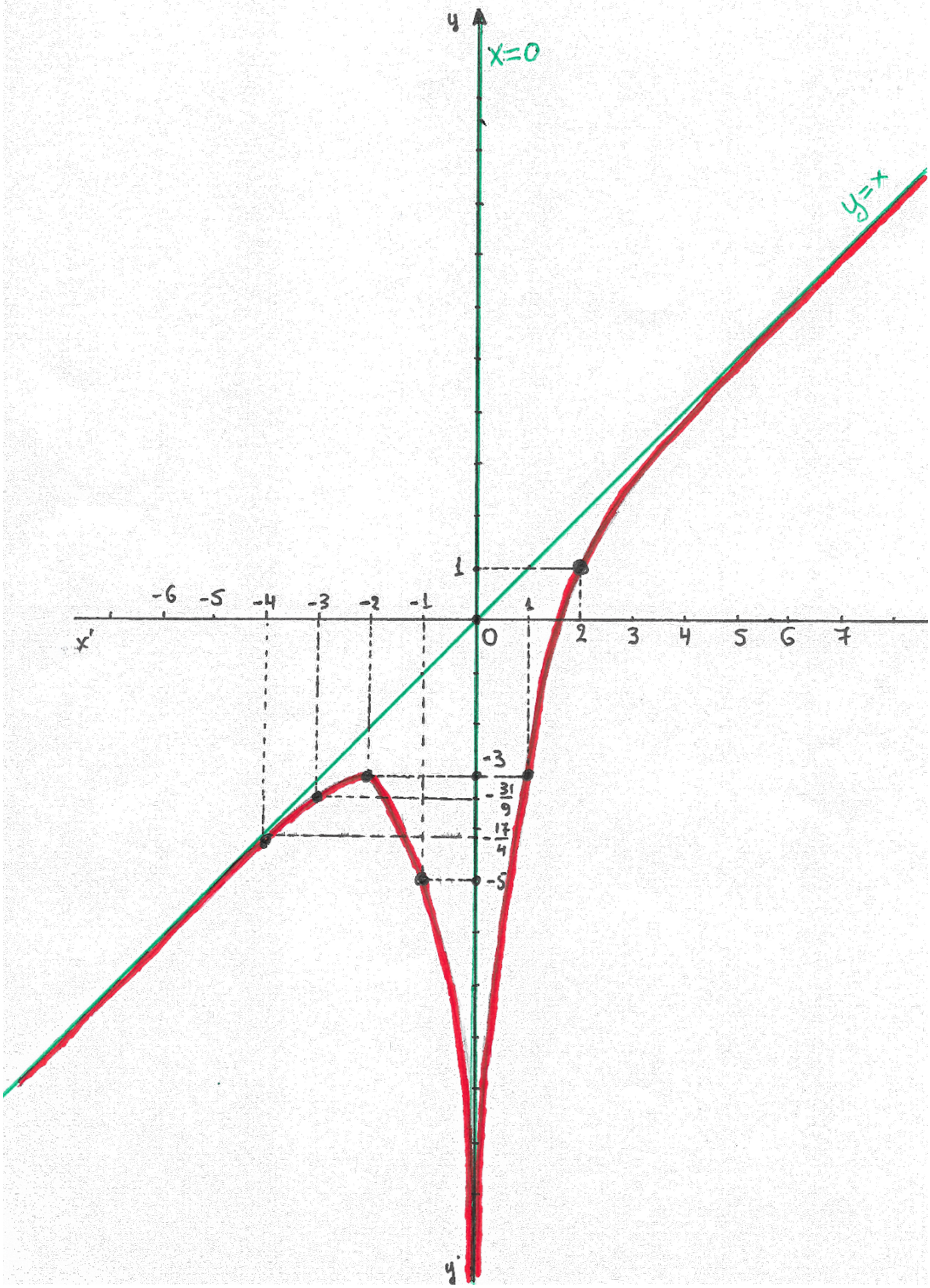
$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]\overset{\lambda=1}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0=\beta$$

Ομοίως: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=0$

Άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη και στο $-\infty$ και στο $+\infty$ την ευθεία: $y=\lambda x+\beta\Rightarrow\boxed{y=x}$

B4.

x	-4	-3	-2	-1	1	2
$y=f(x)$	$-\frac{17}{4}$	$-\frac{31}{9}$	-3	-5	-3	1



y
x=0
y=x
1
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
0
2
3
4
5
6
7
x'
-3
$-\frac{31}{9}$
$-\frac{17}{4}$
-5
y'

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1

Αφού με το σχήμα μήκους x m φτιάχνω τετράγωνο, η πλευρά του είναι $\frac{x}{4}$ m

και το εμβαδόν του $E_1(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}\ m^2 \quad (1)$

Το σύρμα έχει μήκος 8 m άρα με σύρμα μήκους $8-x$ m φτιάχνω τον κύκλο, άρα

$2\pi r=8-x \Leftrightarrow r=\frac{8-x}{2\pi}\ m \quad (2)$

Ο κύκλος έχει εμβαδόν $E_2(x)=\pi\cdot r^2 \overset{(2)}{=} \pi\cdot\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\pi\cdot\frac{(8-x)^2}{4\pi^2}=\frac{(8-x)^2}{4\pi}\ m^2 \quad (3)$

Πρέπει: $\left.\begin{matrix} x>0 \\ 8-x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x>0 \\ x<8 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 0<x<8$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x)=E_1(x)+E_2(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{\pi x^2+4(8-x)^2}{16\pi}=\frac{\pi x^2+4\left(64-16x+x^2\right)}{16\pi}=$$

$$\frac{\pi x^2+4\cdot 64-4\cdot 16x+4x^2}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

Γ.2

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

$$E'(x)=\frac{1}{16\pi}\left[(\pi+4)x^2-64x+256\right]'=\frac{1}{16\pi}\left[2(\pi+4)x-64\right]=\frac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x-32\right]\quad(1)$$

$$E'(x)\geq 0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x-32\right]\geq 0\Leftrightarrow(\pi+4)x\geq 32\Leftrightarrow x\geq\frac{32}{\pi+4}$$

Δηλαδή, $E'(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$

και $E'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$

Άρα η E(x) παρουσιάζει ελάχιστο όταν $x=\frac{32}{\pi+4}$

Επειδή $r=\frac{8-x}{2\pi}\Leftrightarrow 2r=$ διάμετρος $=\frac{8-x}{\pi}=\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi}=\frac{8\pi+32-32}{\pi(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}\quad(2)$

Η πλευρά του τετραγώνου είναι: $\frac{x}{4}=\frac{\frac{32}{\pi+4}}{4}=\frac{8}{\pi+4}\quad(3)$

$(2),(3)\Rightarrow 2r=\frac{x}{4}$

Άρα το $E(x)$ ελαχιστοποιείται όταν η διάμετρος 2r ισούται με την πλευρά του τετραγώνου $\frac{x}{4}$

Γ.3

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
$E'(x)$		-	0	+	
$E(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα μεταβολών για την $E(x)$ έχουμε:

$E(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$

$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=m=$ ελάχιστο

$$\lim_{x\to 0^+} E(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{16}{\pi} > 5$$

άρα το σύνολο τιμών $E(\Delta_1) = \left[m, \frac{16}{\pi} \right)$

E(x) γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8 \right)$

$$\lim_{x\to 8} E(x) = \lim_{x\to 8} \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{(\pi+4)\cdot 64 - 64\cdot 8 + 256}{16\pi}$$

$$= \frac{64\pi + 4\cdot 64 - 8\cdot 64 + 256}{16\pi} = 4$$

άρα το σύνολο τιμών $E(\Delta_2) = [m, 4)$

Επειδή $\frac{16}{\pi} > 5$, το $5 \in \left[m, \frac{16}{\pi} \right)$, η $E(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4} \right]$

άρα $1-1$, οπότε υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in \left(0, \frac{32}{\pi+4} \right] \subseteq (0,8)$

τέτοιο ώστε $E(x_0) = 5$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1

$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$

f παραγωγίσιμη στο $\Re$ ως διαφορά παραγωγίσιμων με:

$f'(x) = 2e^{x-\alpha}(x-\alpha)' - 2x = 2(e^{x-\alpha} - x)$

f' παραγωγίσιμη στο $\Re$ με:

$f''(x) = 2(e^{x-\alpha} - 1)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = 1 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = e^o \overset{e^x:1-1}{\Leftrightarrow} x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} > 1 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = e^o \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x - \alpha > 0 \Leftrightarrow x > \alpha$

Αφού η f'' έχει μοναδική ρίζα το $x_o = \alpha$ και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτής η C_f έχει ακριβώς 1 σημείο καμπτής, το $A(\alpha, f(\alpha)) = A(\alpha, 2-\alpha^2)$ με $\alpha > 1$

Δ.2

$f'(x) = 2(e^{x-\alpha} - x), \alpha > 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} - x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) > 0 \text{ στο } (\alpha, +\infty) \\ \quad f' \text{ συνεχής} \end{array}\right\} \Rightarrow f' \uparrow \text{ στο } [\alpha, +\infty)$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ στο } (-\infty, \alpha) \\ \quad f' \text{ συνεχής} \end{array}\right\} \Rightarrow f' \downarrow \text{ στο } (-\infty, \alpha]$$

• $\Delta_1 = f'([\alpha,+\infty)) \underset{f'\uparrow}{\overset{f'\text{: συνεχής}}{=}} \left[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right) = \left[2(1-\alpha), +\infty\right]$

Διότι:

$f'(\alpha) = 2(e^{o} - \alpha) = 2(1-\alpha) < 0$, αφού $\alpha > 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2\left(e^{x-\alpha} - x\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[2e^{x-\alpha}\left(1 - \frac{x}{e^{x-\alpha}}\right)\right]$

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{x-\alpha} = +\infty$

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-\alpha}} \underset{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\alpha} = +\infty}{\overset{\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-\alpha}} = 0$

D.L.H.

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

• $\Delta_2 = f'\left((-\infty,\alpha]\right) \underset{f'\downarrow}{\overset{f'\text{: συνεχής}}{=}} \left[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\right) = \left[2(1-\alpha), +\infty\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2\left(e^{x-\alpha} - x\right)\right) \underset{\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty}{\overset{\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{e^{\alpha}}}{=}} = +\infty$

Αφού $O \in \Delta_1$ και $O \in \Delta_2$ και $f' \uparrow$ στο $[\alpha,+\infty)$ και $f' \downarrow$ στο $(-\infty,\alpha]$,
η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει 1 ακριβώς ρίζα $x_1 \in (\alpha,+\infty)$, με $x_1, x_2 \neq \alpha$,
διότι: $f'(\alpha) = 2(1-\alpha) \neq 0$ για $\alpha > 1$

$x_1 \in (-\infty,\alpha)$:

Για $x < x_1 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Για $x > x_1 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) < 0$

και αφού $f'(x_1) = 0$ η f παρουσιάζει μοναδικό τοπικό μέγιστο στο x_1

$x_2 \in (\alpha,+\infty)$:

Για $x < x_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Για $x > x_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > 0$

και αφού $f'(x_2) = 0$ η f παρουσιάζει μοναδικό τοπικό ελάχιστο στο x_2

Δ.3

$f(1) = 2e^{1-\alpha} - 1$

Στο $(0, x_2)$, αφού $f'(x) < 0$ και f συνεχής, f γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, x_2]$

άρα και 1−1, οπότε: $f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1$ ΑΔΥΝΑΤΟ διότι $1 \notin (0, x_2)$, αφού $\alpha > 1$

Δ.4

Για $\alpha = 2$:

$f(x) = 2e^{x-2} - x^2,\ x \in \Re$

Από Δ_1 στο $[2,+\infty)$ f κυρτή, άρα κάθε εφαπτομένη της βρίσκεται κάτω απο τη C_f, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$ είναι:

$$(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow \quad (f(2) = 2-4 = -2 \ \text{ και } \ f'(2) = -2)$$

$$y + 2 = -2\cdot(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 4 - 2 \Leftrightarrow y = -2x + 2$$

Οπότε θα ισχύει:

$f(x) \geq -2x + 2$ για κάθε $x \geq 2$ και το "=" θα ισχύει μόνο για $x = 2$

$$\overset{x-2>0}{\Leftrightarrow} f(x)\cdot\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}, \text{ άρα:}$$

$$\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}\,dx \quad (1)$$

$$\int_2^3 (-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}\,dx = \left(\begin{array}{l} \text{θέτω: } x-2 = u \Leftrightarrow x = u+2 \Leftrightarrow -2x+2 = -2u-2 \\ du = (x-2)'\,dx \Leftrightarrow du = dx \\ u_1 = 2-2 = 0 \qquad u_2 = 3-2 = 1 \end{array}\right)$$

$$\int_0^1 (-2u-2)\sqrt{u}\,du = \int_0^1 (-2u-2)u^{\frac{1}{2}}\,du = \int_0^1 \left(-2u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right) du =$$

$$\left[-2\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \left[-\frac{4u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4u^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{15}$$

Άρα $(1) \Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$